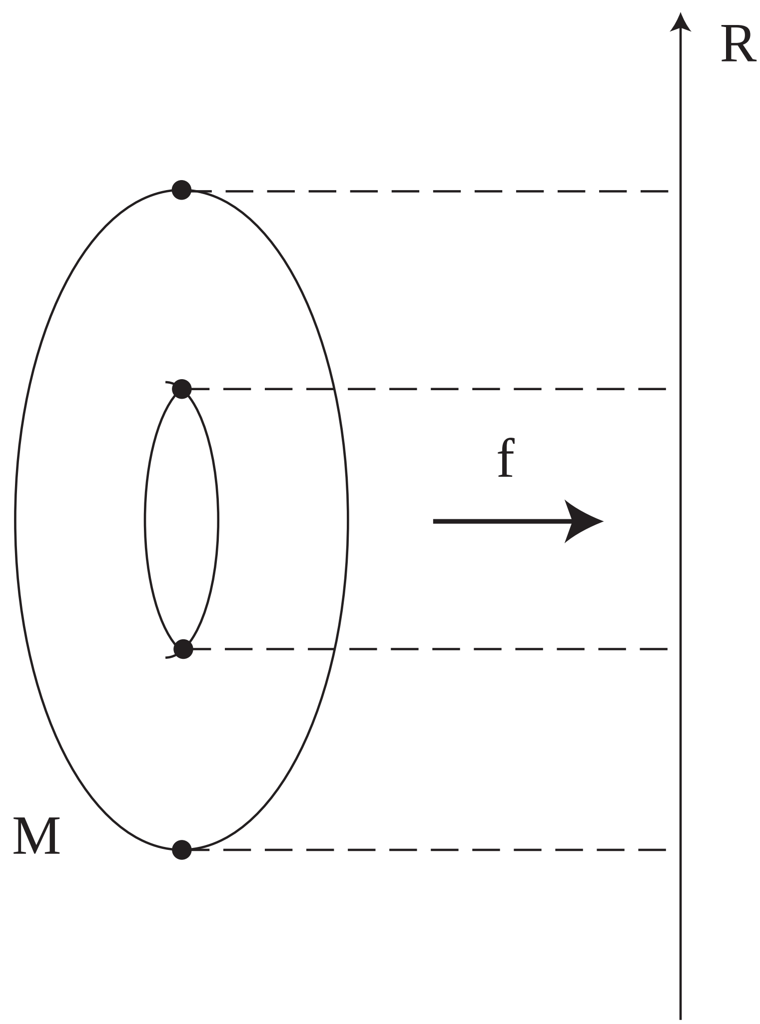
Morse position of knots and closed incompressible surfaces

小沢　誠（駒澤大学）

2005年5月9日

定義（Morse関数）

多様体M上の関数$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$の各臨界点が非退化であり、それらの臨界値が異なるとき、fを**Morse関数**という。

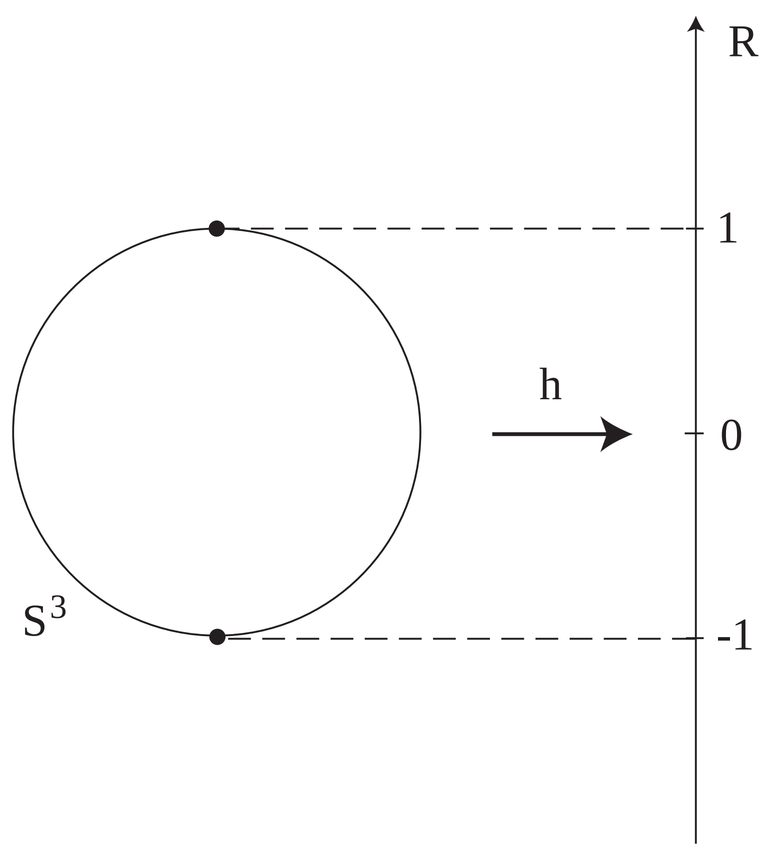


$h : S^3 \to \mathbb{R}$をS^3上の標準的なMorse関数とする。

即ち、

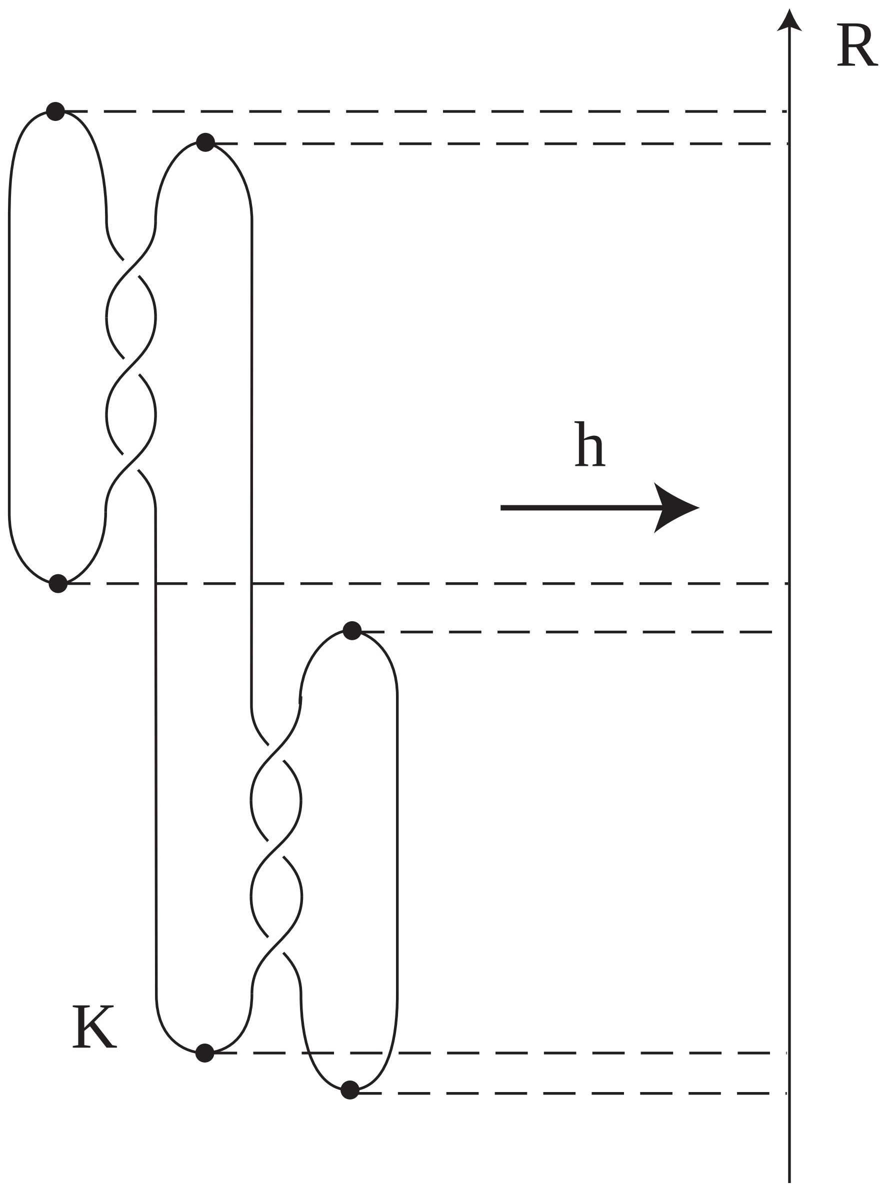
$i : S^3 \to \mathbb{R}^4$ ： 包含写像
$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$: 射影 $(x, y, z, w) \mapsto w$

とするとき、$h = p \circ i$



定義（Morse position）

Morse 関数 $h : S^3 \to \mathbb{R}$ の結び目 $K \subset S^3$ への制限が Morse 関数であるとき、K は h に関して **Morse position** にあるという。

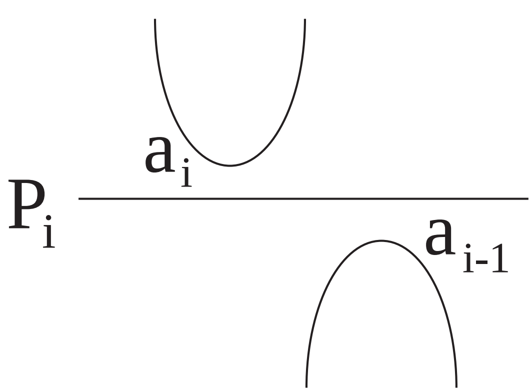


$a_0, \ldots, a_n$ を K の臨界点で、対応する臨界値 $t_i = h(a_i)$が、各iに対して$t_{i-1} < t_i$を満たすものとする。

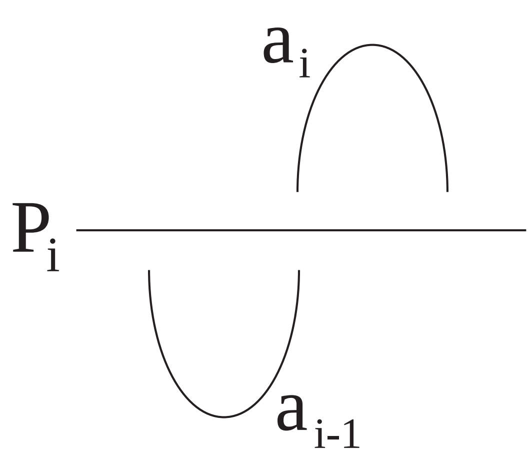
正則値$s_i \in (t_{i-1}, t_i)$に対して、$P_i = h^{-1}(s_i)$をa_{i-1}とa_iの間の**level sphere**という。

a_{i-1} が極大点で a_i が極小点であるとき、P_i を **thin level sphere**という。

a_{i-1} が極小点で a_i が極大点であるとき、P_i を **thin level sphere**という。



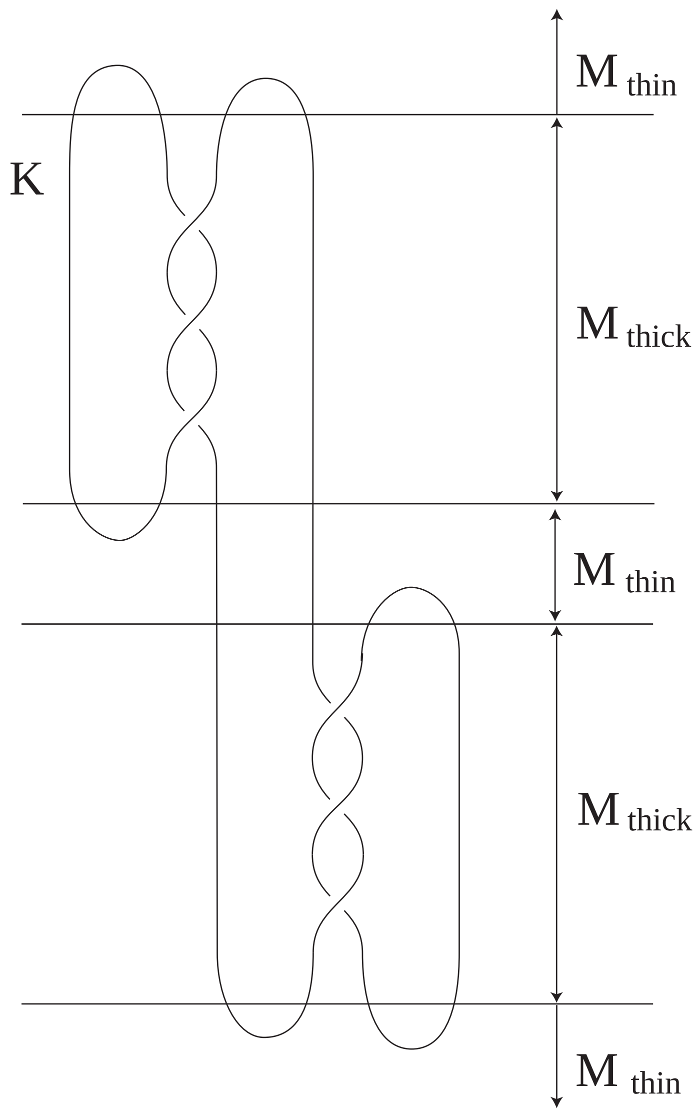
thin level sphere



thick level sphere

各thick level sphere P_iに対して、**thick region**を$h^{-1}([t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon])$で定める。

全てのthick regionの和をM_{thick}とし、M_{thick}の残りの各成分を**thin region**と呼び、和をM_{thin}で表す。

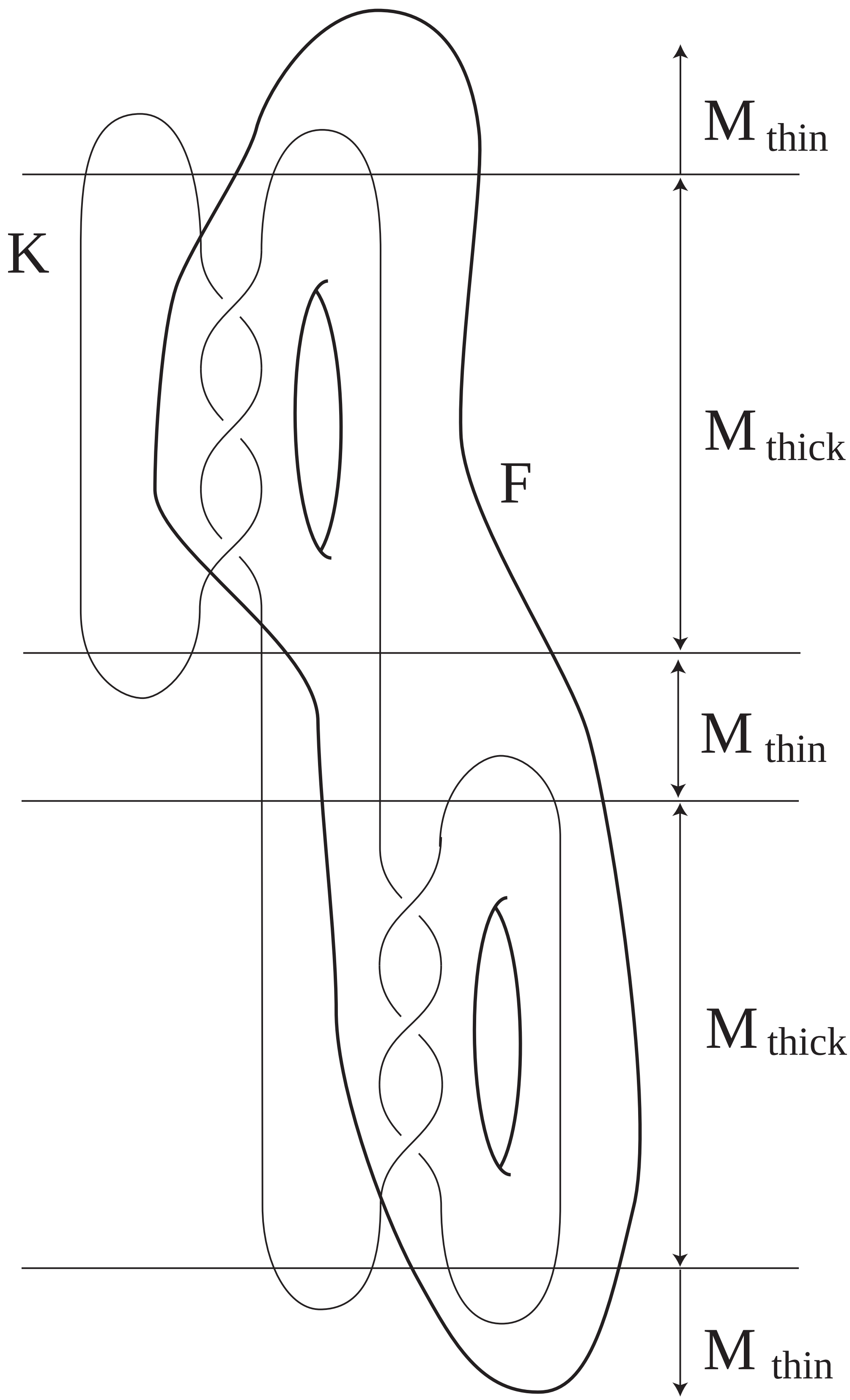


FをS^3内のclosed surfaceで、Kと交わらないか、又はKと横断的に交わるものとする。

定義（Morse position）

Fが次を満たすとき、K**に関してMorse position**にあるという。

1. Fはhに関してMorse position
2. FとKは一般の位置にあり、$F \cap K \subset M_{thick}$
3. Fの全ての極大点と極小点はM_{thin}に含まれ、全ての鞍点はM_{thick}に含まれる。

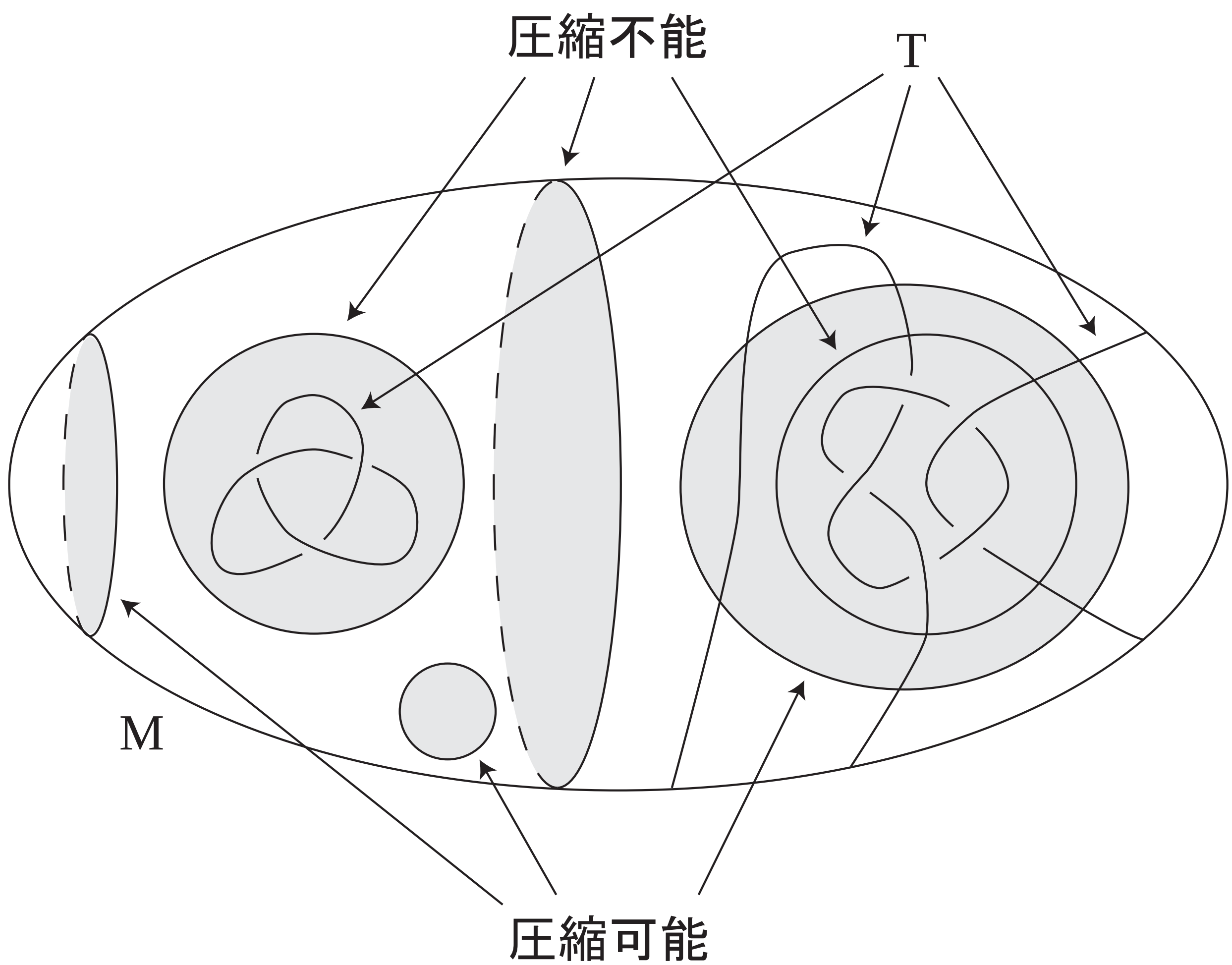

K
F
M thin
M thick
M thin
M thick
M thin

Mを３次元多様体、TをM内に適切に埋め込まれた１次元多様体、FをM内に適切に埋め込まれた曲面でTと交わらないか又はTと横断的にFの内部で交わるものとする。

定義（圧縮不能）

Fが次を満たすとき、(M,T)内で**圧縮不能**という。

1. 【$F=S^2$, $F\cap T=\emptyset$の場合】
   $\exists\ B^3\subset M-T$, s.t. $\partial B^3=F$
2. 【$F=D^2$, $F\cap T=\emptyset$の場合】
   $\forall\ D^2\subset\partial M-\partial T$, $\partial D^2=\partial F$,
   $\nexists\ B^3\subset M-T$, s.t. $\partial B^3=F\cup D$
3. 【その他の場合】
   $\forall\ D^2\subset M-T,\ D^2\cap F=\partial D^2$,
   $\exists\ D^{2\prime}\subset F-T$, s.t. $\partial D^{2\prime}=\partial D$


圧縮不能
T
M
圧縮可能

$K \subset S^3$をhに関してMorse positionにある結び目とし、$F \subset S^3$をKに関してMorse positionにある閉曲面とする。

定義（essential Morse position）

Fが次を満たすとき、K**に関してessential Morse position**にあるという。

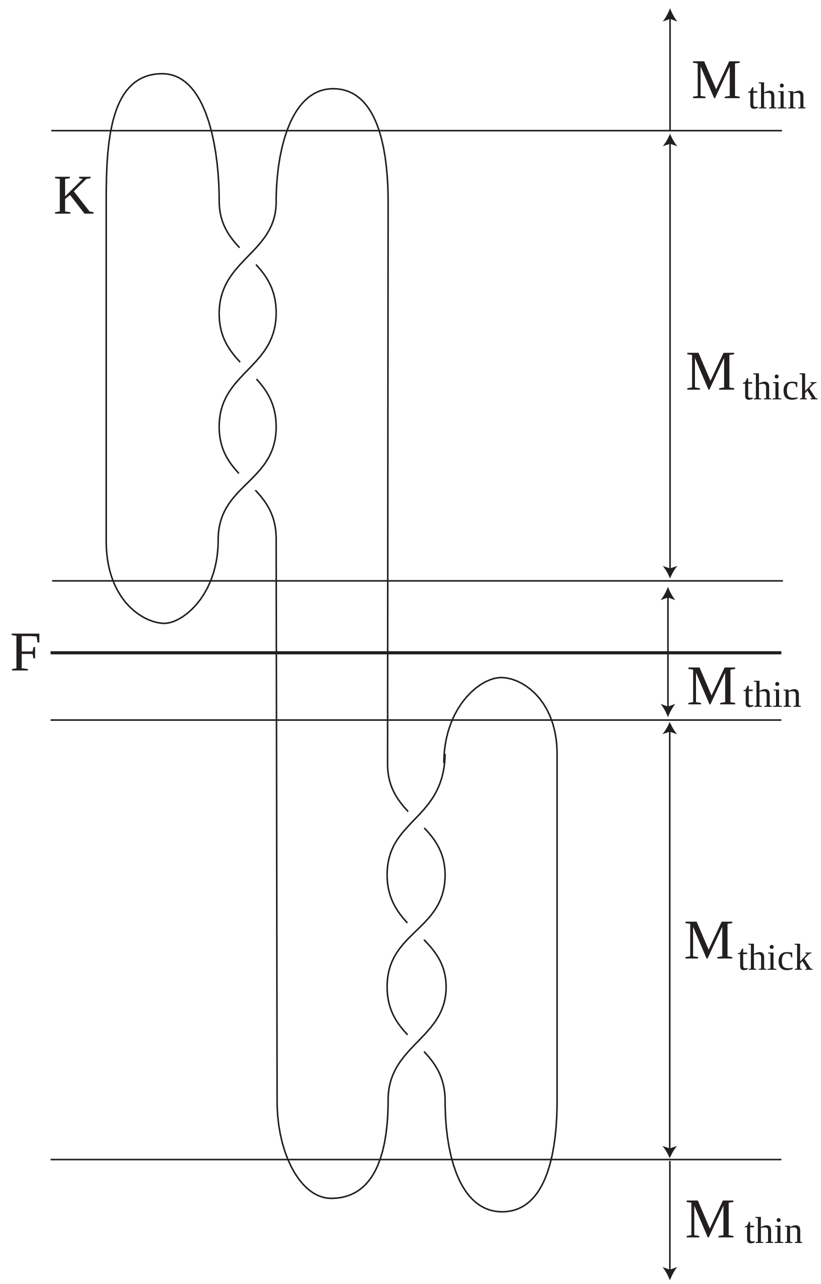
4. $F \cap M_{thin}$及び$F \cap M_{thick}$の各成分が、それぞれ$(M_{thin}, K \cap M_{thin})$及び$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$で圧縮不能

定理

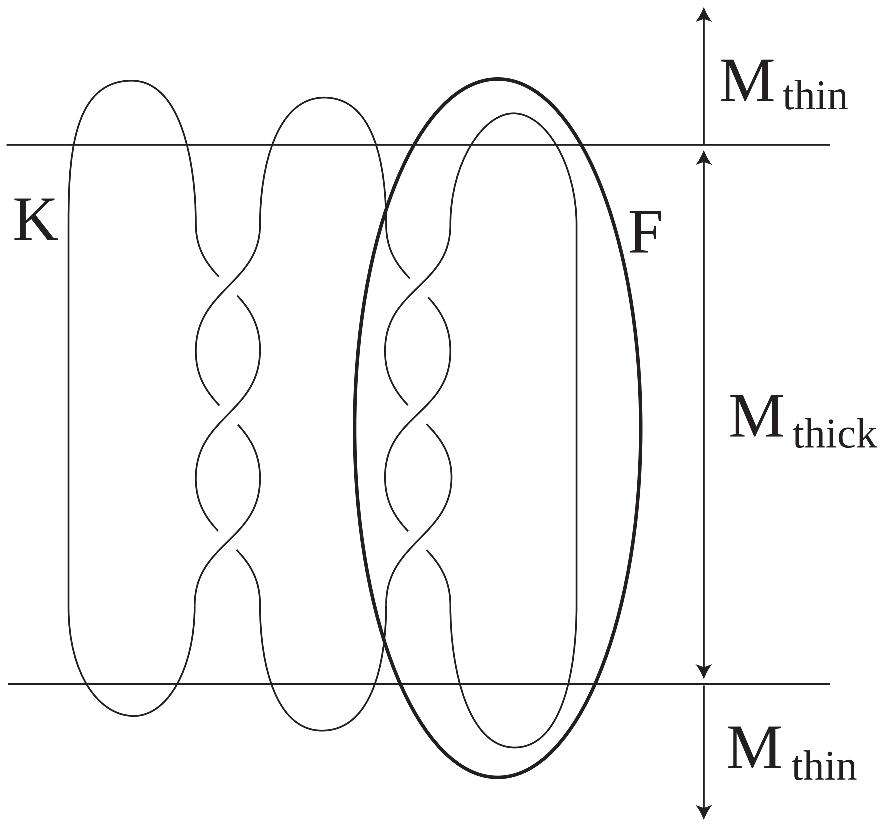
$K \subset S^3$をhに関してMorse positionにある結び目とし、$F \subset S^3$をKと交わらないか、又はKと横断的に交わる閉曲面で、(S^3, K)内で圧縮不能であるとする。この時、Fは次のいずれかのようにイソトープできる。

1. Fはthin level sphere、又は
2. FはKに関してessential Morse position

例1. Fはthin level sphere



例2. F は K に関して essential Morse position



証明の流れ

Step 1. $F \cap M_{thin}$を圧縮不能ディスク又はアニュラスのみにする。

$\downarrow$

Step 2. $|F \cap M_{thin}|$を最小にした上で、$F \cap M_{thick}$の臨界点の個数を最小にする。

$\downarrow$

Step 3. $F \cap M_{thick}$が$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$で圧縮不能を示す。

$\downarrow$

もし$F \cap M_{thick}$が極大点又は極小点を持たなければ、Fはessential Morse positionである。（結論2）

もし$F \cap M_{thick}$が極大点又は極小点を持つならば、Fはthin level sphereにイソトピックである。（結論1）

準備

S : 2-sphere
$F \subset S \times I$: surface

$p : S \times I \to S \times \{0\}$: projection
$h : S \times I \to I$: height function

定義

$S \times I$のイソトピーϕ_tが、任意の$t \in [0,1]$に対して$h \circ \phi_t = h$を満たすとき、**horizontal isotopy**という。

定義

Fが**horizontally ∂-parallel** in $S \times I$
$\iff$ $\exists$ horizontal isotopy ϕ_t,
s.t. $p \circ \phi_1$ is a homeomorphism on F

補題1

Sを球面、XをS上の点の和、$F \subset (S \times I, X \times I)$を圧縮不能曲面とする。もし、$F$がhorizontally ∂-parallelならば、Fは$(S \times I, X \times I)$内で∂-parallelである。

証明

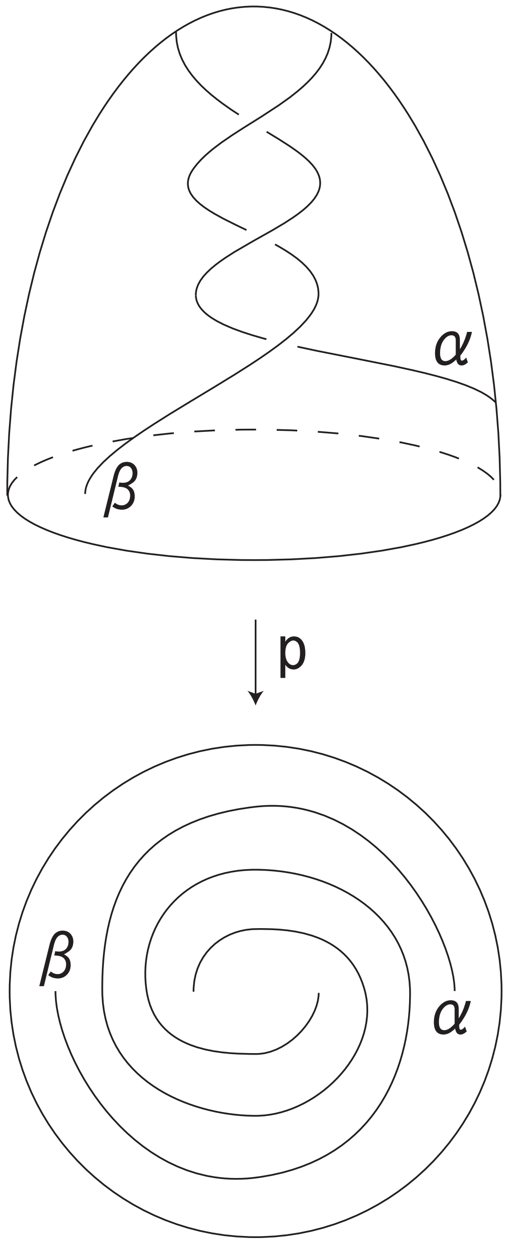
Fはhorizontally ∂-parallelであるから、pはF上homeomorphismとしてよい。

また、$X \times I$は単調であるから、pは$(X \times I) \cap V$上homeomorphismとしてよい。ここで、VはFと$p(F)$がboundする3-manifoldである。

このとき、$p((X \times I) \cap V)$はdisjoint arcsから成る。

仮に、$(X \times I) \cap V$のarc αで、$\partial\alpha$がFに含まれるものがあったとすると、αとF上のarcがdiskをboundするので、Fが圧縮不能であることに反する。

故に、$(X \times I) \cap V$ の任意の arc は F と $p(F)$ を単調に繋いでいるので、F は ∂-parallel である。



補題２

Sを球面、XをS上の点の和、$F \subset (S \times I, X \times I)$を$h : S \times I \to I$に関してMorse positionにある圧縮不能曲面とする。Fのイソトピーで、Fの臨界点の個数を最小と仮定する。このとき、もしFが極大点を持つならば、Fは$(S \times I, X \times I)$内で∂-parallelである。

証明

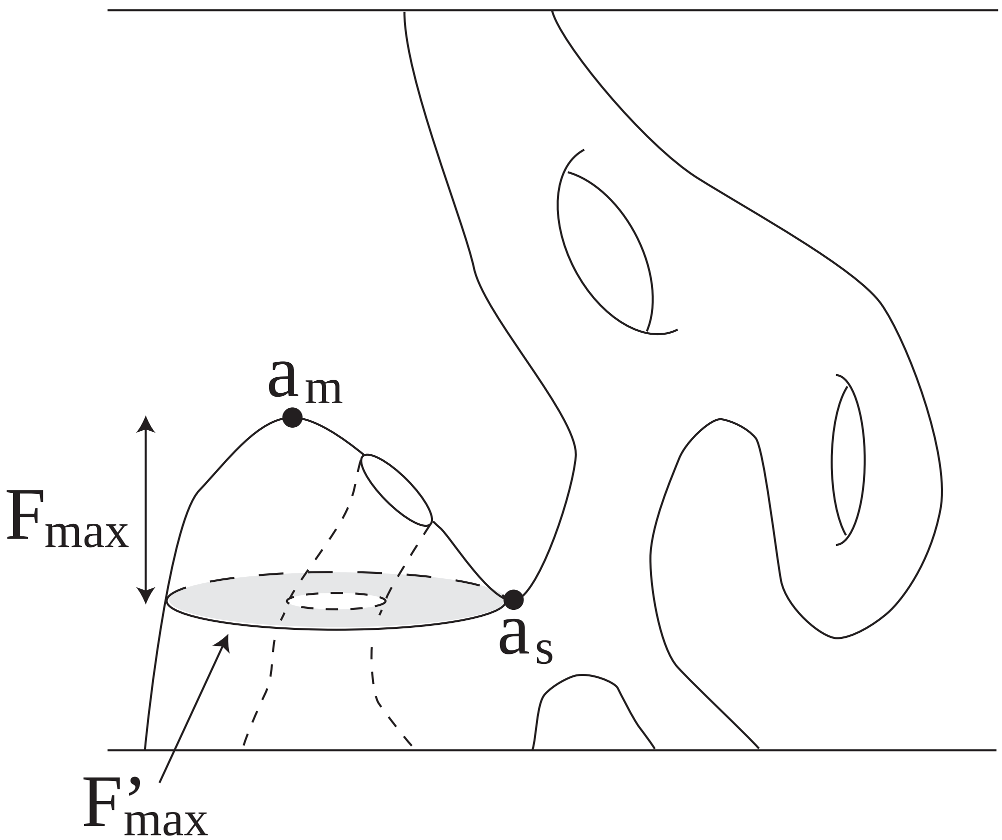
$a_0, \ldots, a_n$をFの臨界点で、対応する臨界値$t_i = h(a_i)$が、各iに関して$t_{i-1} < t_i$を満たすものとする。

a_mを**最も低い**F**の極大点**とする。

もし$m = 0$ならば、Fは唯一の極大点a_0を持つディスクであり、$(S \times I, X \times I)$内で∂-parallelである。

以下、$m \geq 1$と仮定する。

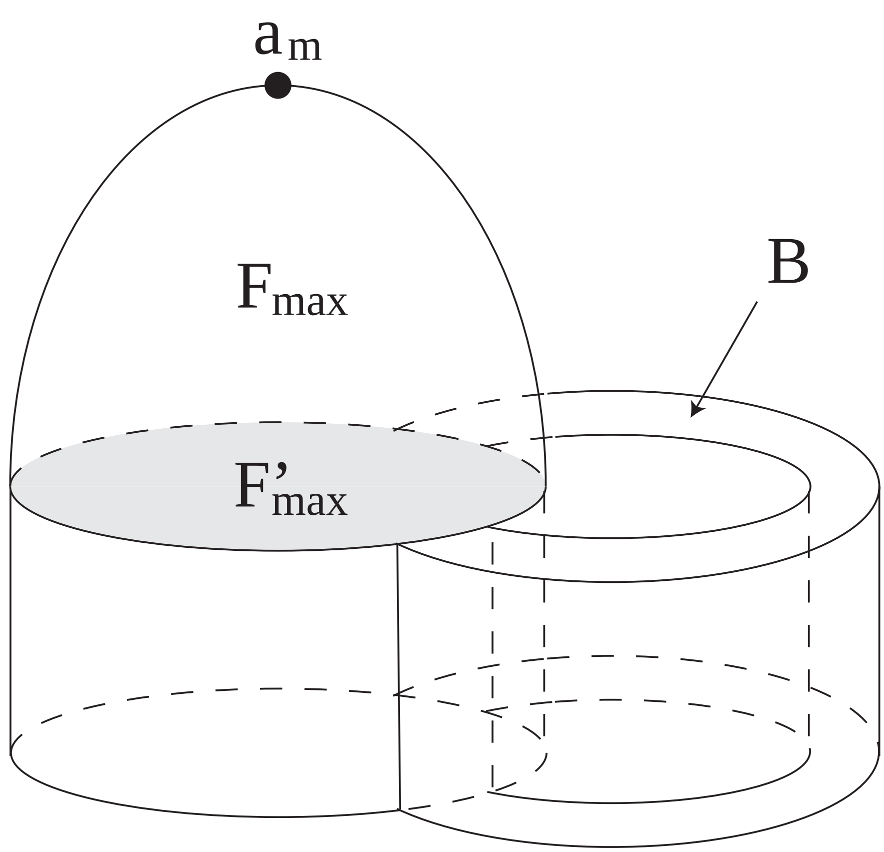
F_{max}を、a_mを含むFの**極大な∂-parallel 部分曲面**とする。



F_{max}に関与する次の臨界点a_sは、a_mが最も低い極大点であるから、鞍点又は極小点である。

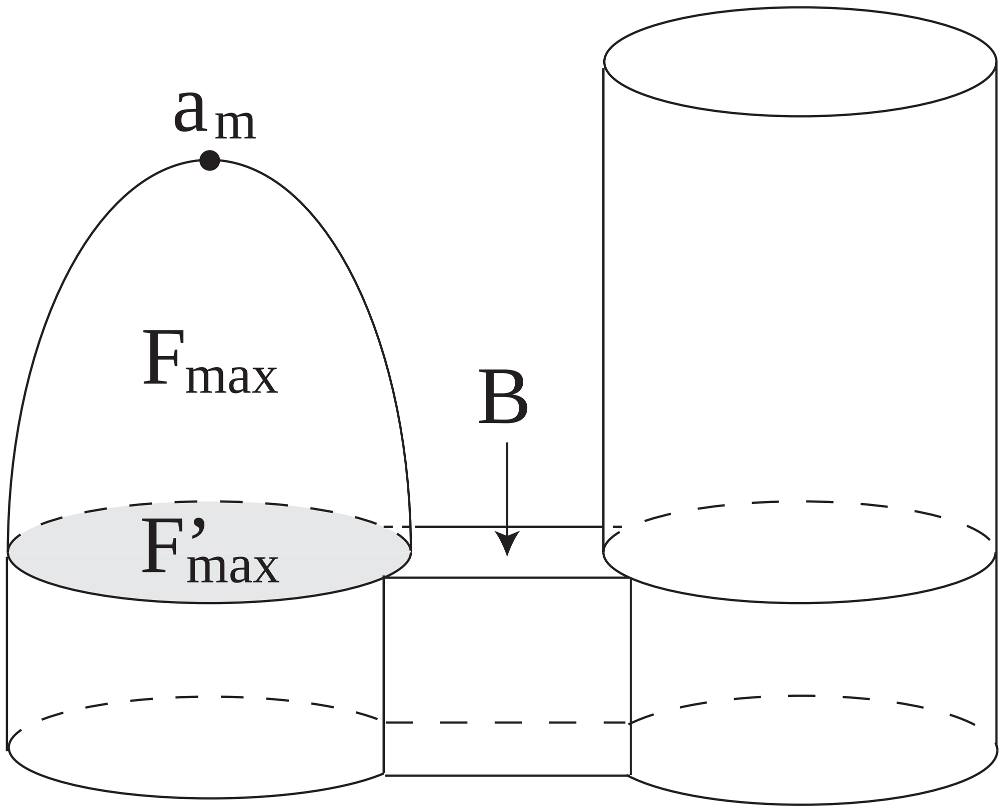
鞍点の近傍をバンドBとみなし、極小点の近傍をディスクEとみなす。

Case 1 バンド B は F'_{max} の外側にあり、F_{max} の同じ境界成分を繋ぐ。



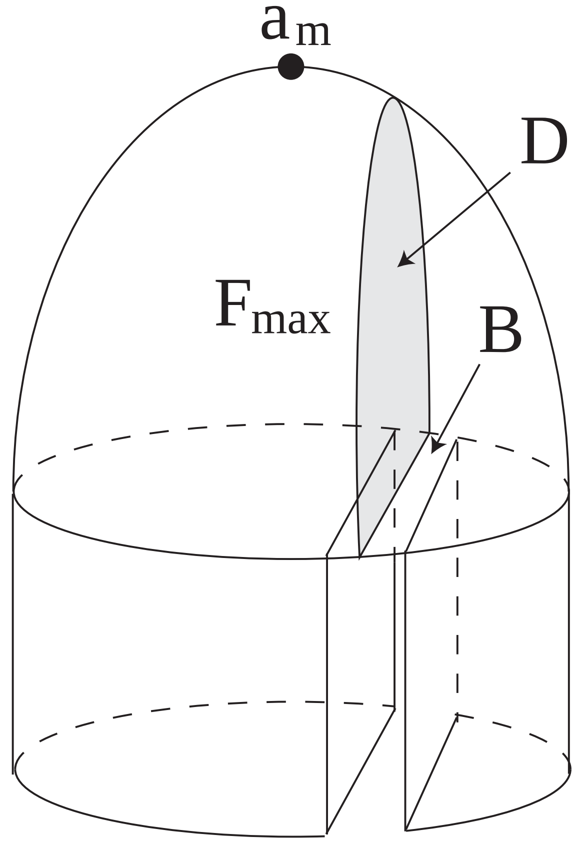
この場合、更に大きな ∂-parallel 部分曲面ができ、F_{max} の極大性に反する。

Case 2 バンド B は F'_{max} の外側にあり、 F_{max} の境界成分と他の部分曲面の境界成分を繋ぐ。



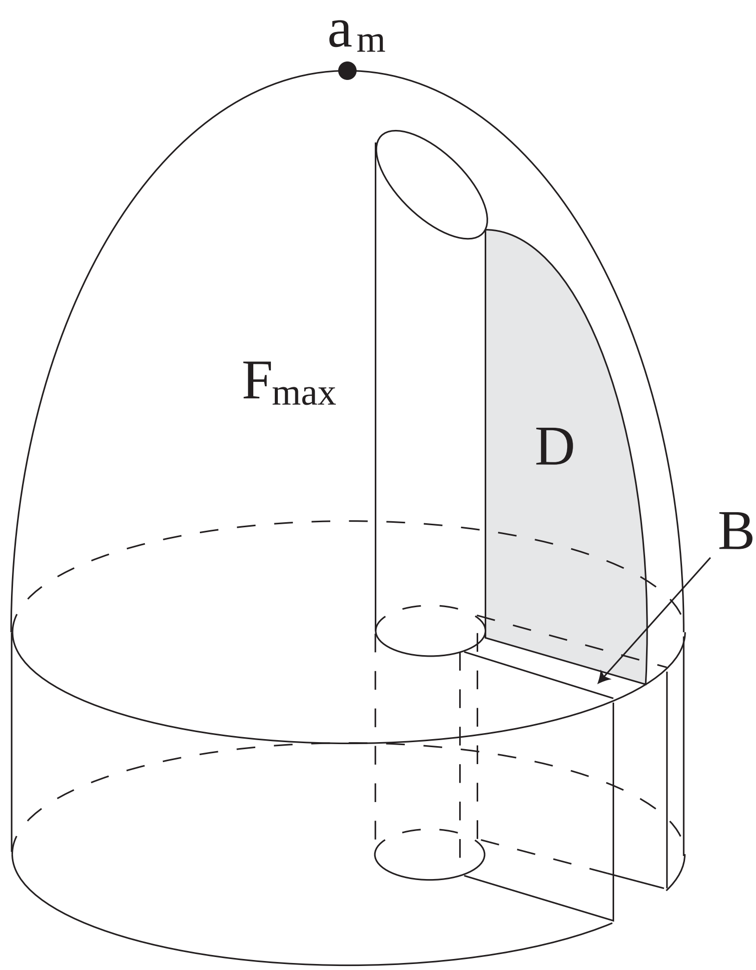
この場合、F_{max} から F'_{max} へのイソトピーにより、極大点 a_m と鞍点 a_s がキャンセルする。これは、F の臨界点の個数の最小性に矛盾する。

Case 3 バンド B は F'_{max} の内側にあり、F_{max} の同じ境界成分を繋ぐ。



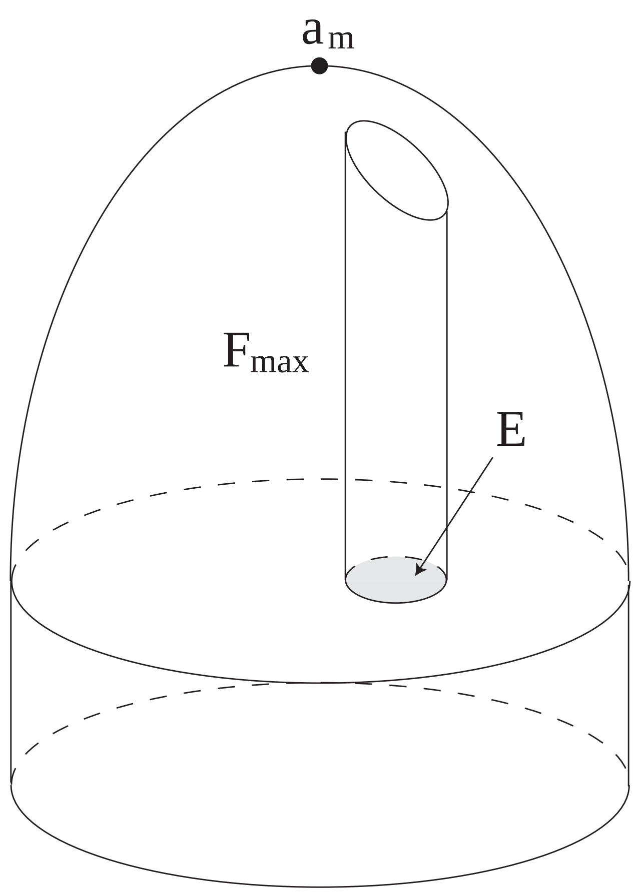
この場合、$F_{max} \cup B$ に対する圧縮ディスク D が存在する。F は圧縮不能であるから、ディスク $D' \subset F$ で $\partial D' = \partial D$ を満たすものが存在する。この時、D' から D へのイソトピーにより、鞍点 a_s が消去される。

Case 4 バンド B は F'_{max} の内側にあり、F_{max} の異なる境界成分を繋ぐ。



この場合、$F_{max} \cup B$ に対する圧縮ディスク D が存在する。∂D は F 内本質的であるから、D は F の圧縮ディスクであり、F が圧縮不能という仮定に矛盾する。

Case 5 ディスクEはF_{max}の境界成分に沿ってF_{max}に蓋をする。



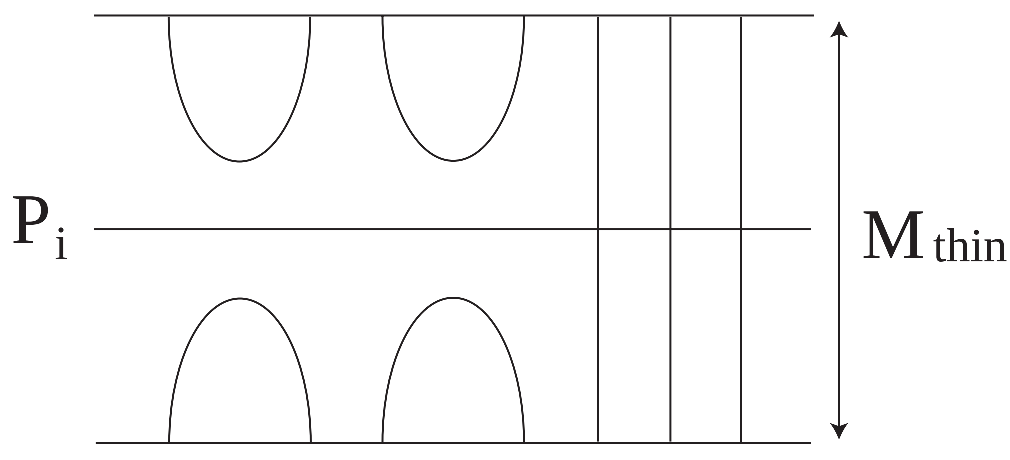
F_{max}がディスクでない場合、$F_{max} \cup E$から$F'_{max} \cup E$へのイソトピーにより、F_{max}の鞍点と極小点a_sがキャンセルする。
F_{max}がディスクの場合は、Fはlevel sphereにイソトピックとなる。□

定理の証明

Step 1. $F \cap M_{thin}$を圧縮不能ディスク又はアニュラスのみにする。

M_{thin}の各成分をthin level sphere P_iで二つに分割する。

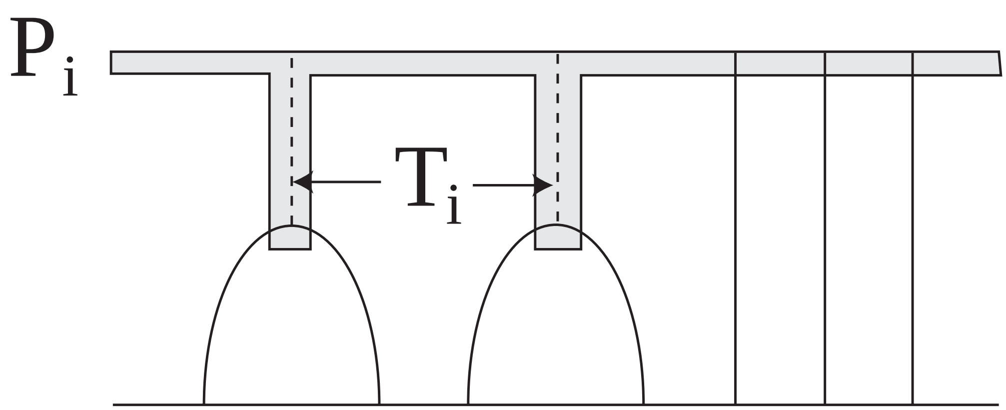
分割された成分とKとの交わりは単調なアークか、唯一の極大点又は極小点を持つアークのみとなる。



Fが圧縮不能であるから、$F \cap P_i$の各成分は$P_i - K$内で本質的なループのみとしてよい。

P_iからKの極大点（又は極小点）に単調なアークT_iを繋ぎ、$F \cap T_i$を一般の位置にする。

この時、$N(P_i \cup T_i)$とFとの交わりは、圧縮不能なディスク又はアニュラスのみとなる。



$N(P_i \cup T_i)$の残りの部分は、(球面, 点)の組の直積であるから、Fのイソトピーにより、Fとの交わりも直積であるとしてよい。□

Step 2. $|F \cap M_{thin}|$を最小にした上で、$F \cap M_{thick}$の臨界点の個数を最小にしておく。

Step 3. $F \cap M_{thick}$が$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$で圧縮不能を示す。

仮に$F \cap M_{thick}$が$(M_{thick}, K \cap M_{thick})$で圧縮可能であったとすると、圧縮ディスク$D \subset M_{thick}$が存在する。

しかし、Fは(S^3, K)内で圧縮不能であるから、ディスク$D' \subset F - K$で、$\partial D' = \partial D$を満たすものが存在する。

$D' \cap M_{thin} \neq \emptyset$であるから、$D'$から$D$へのイソトピーにより、$|F \cap M_{thin}|$が減る。

これは、$|F \cap M_{thin}|$の最小性に矛盾する。$\square$

もし $F \cap M_{thick}$ が極大点又は極小点を持たなければ、essential Morse positionの条件1〜4が満たされ、定理の結論2を得る。

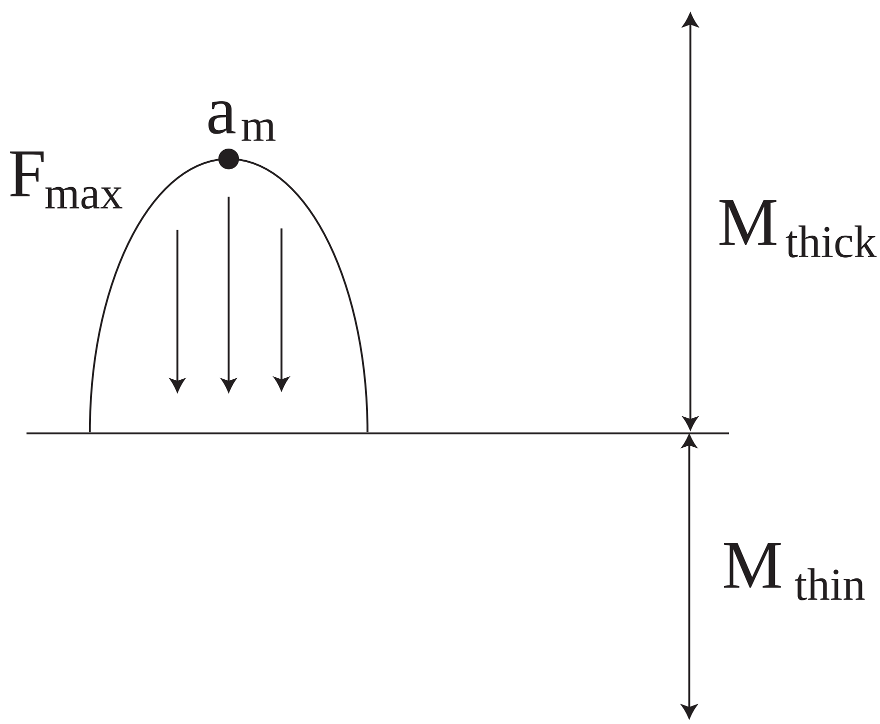
essential Morse positionの条件

1. F は h に関してMorse position
2. F と K は一般の位置にあり、$F \cap K \subset M_{thick}$
3. F の全ての極大点と極小点は M_{thin} に含まれ、全ての鞍点は M_{thick} に含まれる。
4. $F \cap M_{thin}$ 及び $F \cap M_{thick}$ の各成分が、それぞれ $(M_{thin}, K \cap M_{thin})$ 及び $(M_{thick}, K \cap M_{thick})$ で圧縮不能

もし $F \cap M_{thick}$ が極大点又は極小点を持つならば、F はthin level sphereにイソトピックであり、定理の結論1を得る。

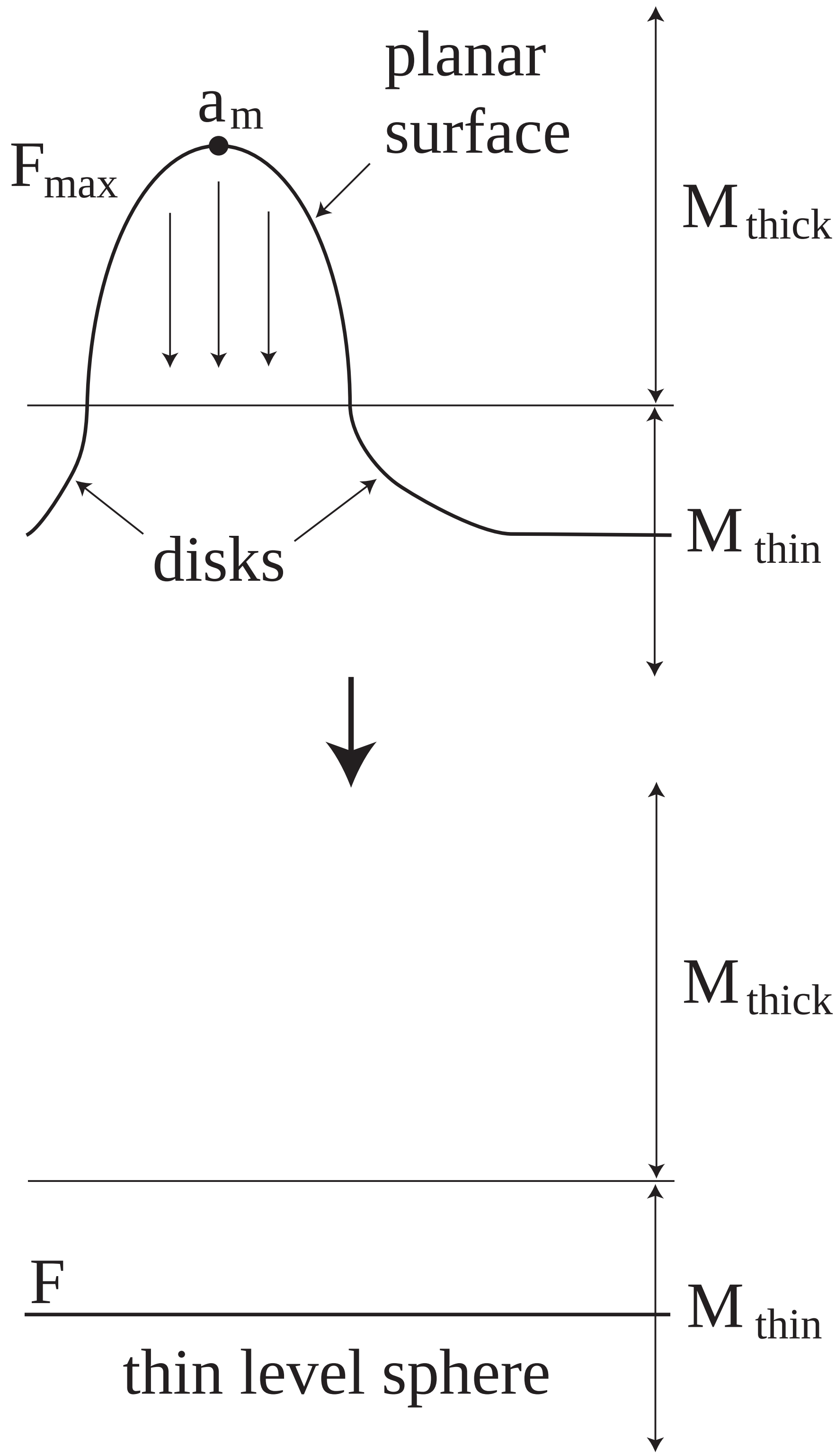
一般性を失わず、$F \cap M_{thick}$ が極大点を持つと仮定する。

a_m を最も低い $F \cap M_{thick}$ の極大点とすると、補題1により、a_m を含む $F \cap M_{thick}$ の成分 F_{max} は、M_{thin} へ ∂-parallelである。



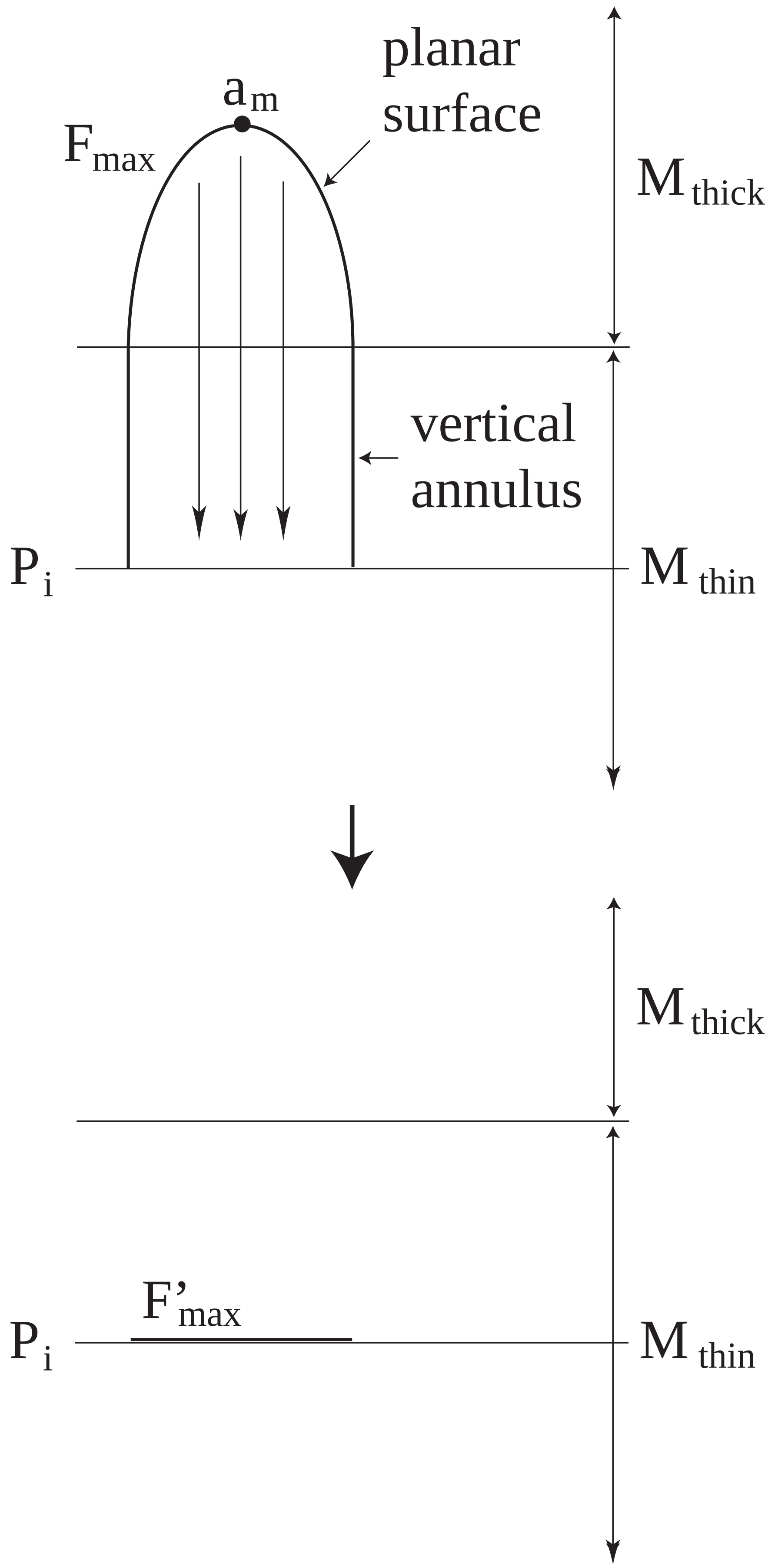
Case 1. F_{max}が$F \cap M_{thin}$のアニュラスと繋がらない。

この場合、Fはplanar surface F_{max}とdisks $F \cap M_{thin}$の和となるから、FはM_{thin}に完全に含まれる球面である。補題1により、Fはthin level sphere P_iにparallelであるので、定理の結論1を得る。


planar
surface
a_m
F_{max}
M_{thick}
disks
M_{thin}
M_{thick}
F
M_{thin}
thin level sphere

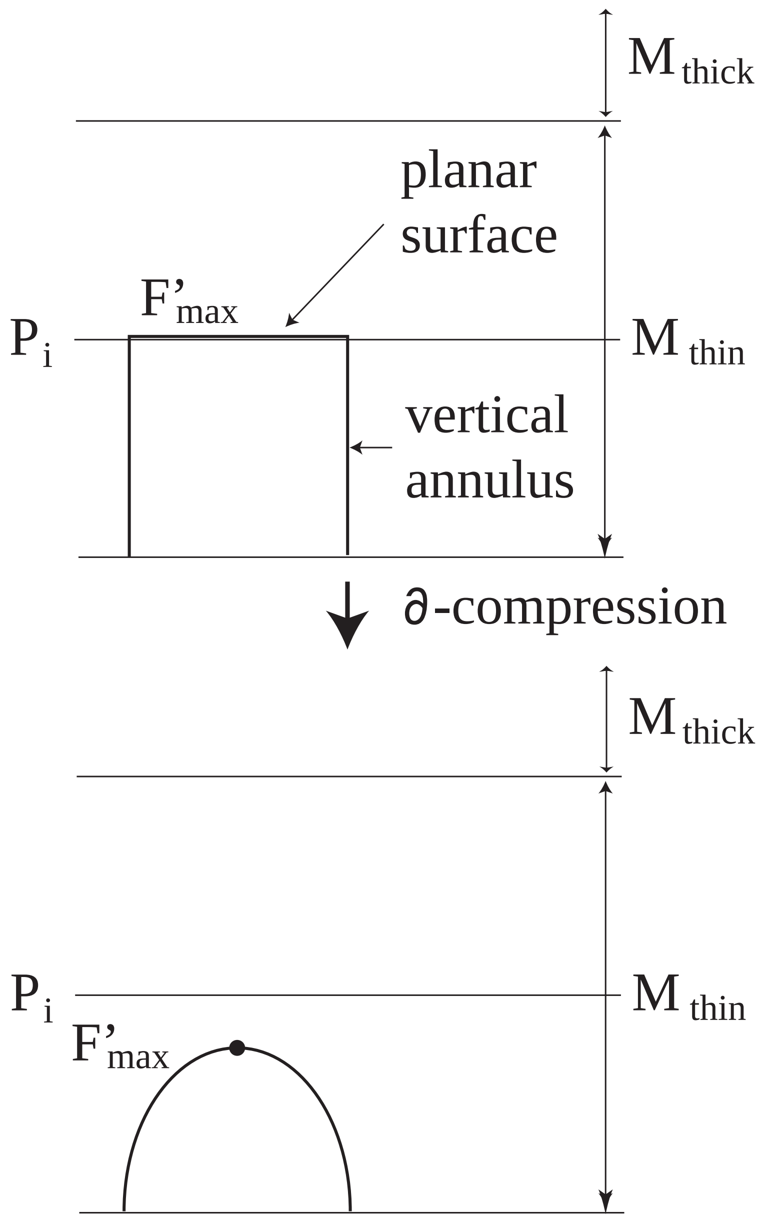
Case 2. F_{max}が$F \cap M_{thin}$のアニュラスと繋がる。

この場合、F_{max}はthin level sphere P_iの部分曲面F'_{max}へとイソトピックである。



planar
surface
a_m
F_{max}
M_{thick}
vertical
annulus
P_i
M_{thin}
M_{thick}
F'_{max}
P_i
M_{thin}

従って、必要ならば∂-compressionを行うことにより、F'_{max}は唯一の極大点を持つディスクであると仮定してよい。



以上の操作において、$|F \cap M_{thin}|$は増えず、少なくとも一つの極大点a_sが消去される。

これは、$F \cap M_{thick}$の臨界点の個数の最小性に矛盾する。$\square$