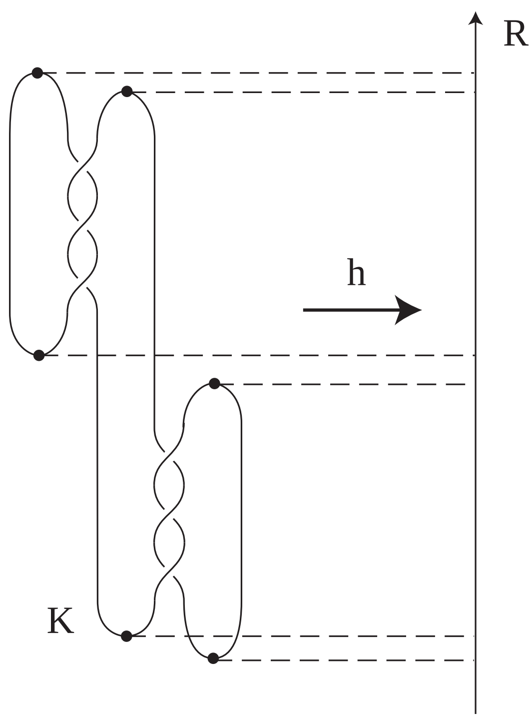
Morse position of knots and closed incompressible surfaces

小沢　誠（駒澤大学）

2005 年 8 月 30 日

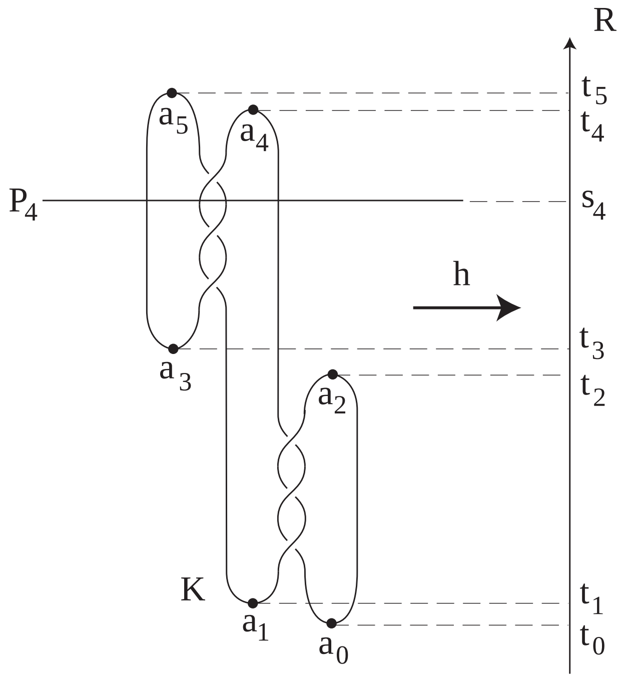
定義

Morse 関数 $h : S^3 \to \mathbb{R}$ の結び目 $K \subset S^3$ への制限が Morse 関数であるとき、K は h に関して **Morse position** にあるという。

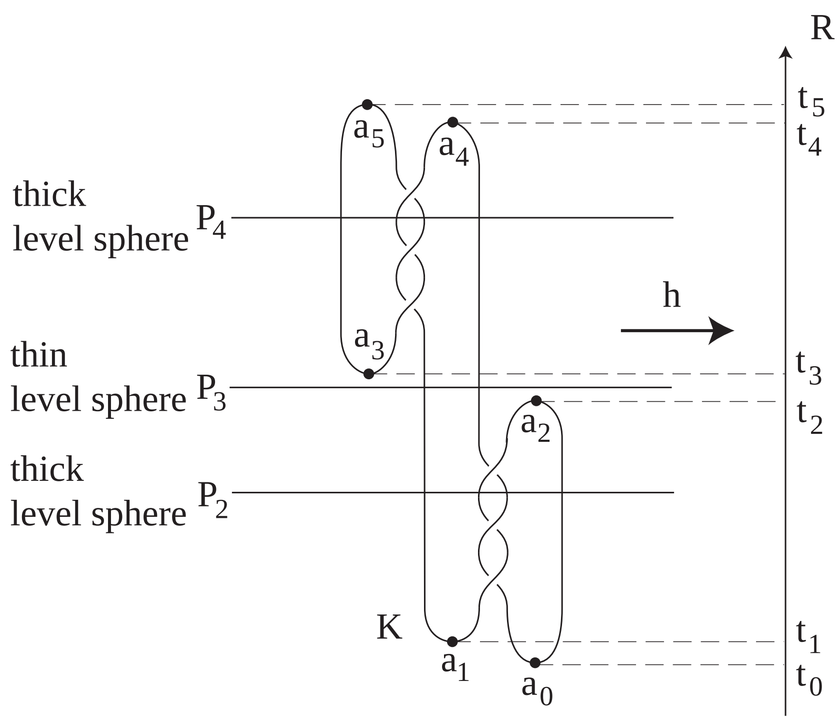


$a_0, \ldots, a_n$ を K の臨界点で、対応する臨界値 $t_i = h(a_i)$ が、各 i に対して $t_{i-1} < t_i$ を満たすものとする。

正則値 $s_i \in (t_{i-1}, t_i)$ に対して、$P_i = h^{-1}(s_i)$ を a_{i-1} と a_i の間の **level sphere** という。

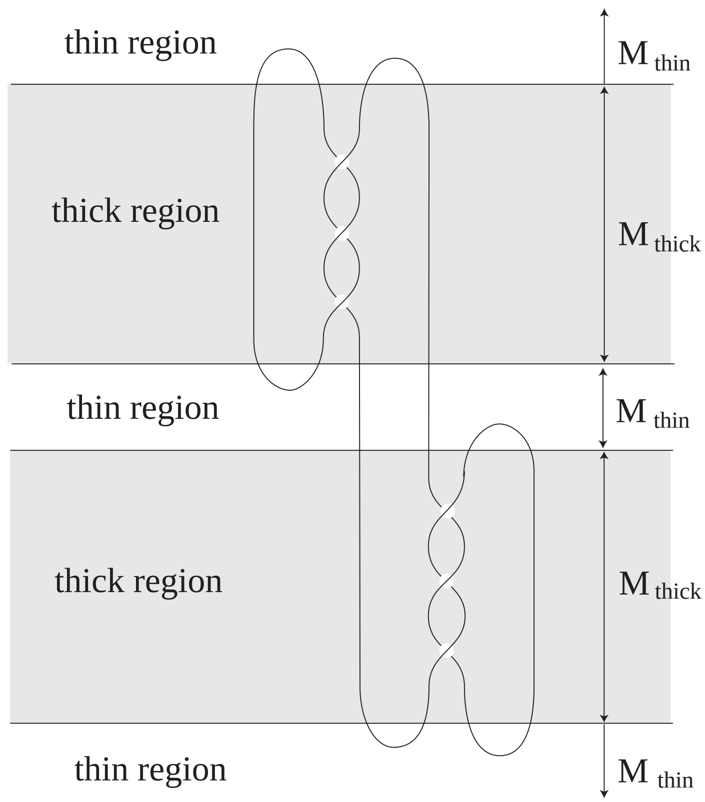


a_{i-1} が極大点で a_i が極小点であるとき、P_i を **thin level sphere** という。
a_{i-1} が極小点で a_i が極大点であるとき、P_i を **thick level sphere** という。



各 thick level sphere P_i に対して、**thick region** を $h^{-1}([t_{i-1}+\epsilon, t_i-\epsilon])$ で定める。

全ての thick region の和を M_{thick} とし、M_{thick} の残りの各成分を **thin region** と呼び、和を M_{thin} で表す。



F を S^3 内の閉曲面で、K と交わらないか、又は K と横断的に交わるものとする。

定義

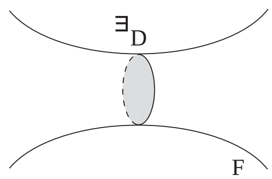
F が次を満たすとき、K **に関して Morse position** にあるという。

1. $h: S^3 \to \mathbb{R}$ の F への制限が Morse 関数
2. F と K は一般の位置にあり、$F \cap K \subset M_{thick}$
3. F の全ての極大点と極小点は M_{thin} に含まれ、全ての鞍点は M_{thick} に含まれる。

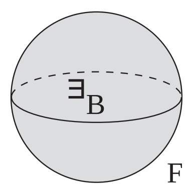
任意の閉曲面は、K に関して Morse position にイソトープできる。
また、F が K に関して Morse position にあるならば、$F \cap M_{thin}$ は disk か vertical な annulus から成る。

M を 3 次元多様体、T を M 内に適切に埋め込まれた 1 次元多様体、F を M 内に適切に埋め込まれた曲面で T と交わらないか又は T と横断的に F の内部で交わるものとする。

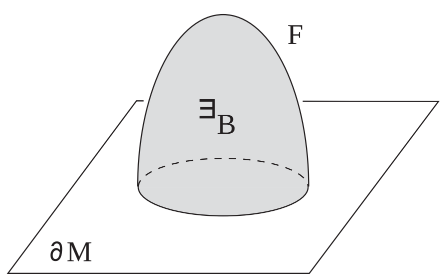
F が (M, T) 内で **compressible** であるとは、



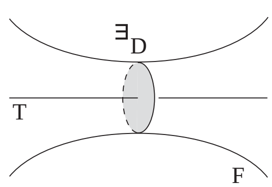
F が球面の場合、



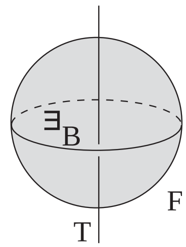
F がディスクの場合、



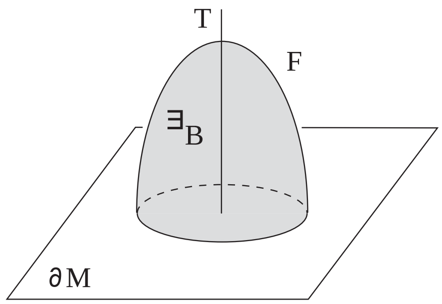
F が (M, T) 内で compressible でないとき、**incompressible** という。
F が (M, T) 内で **meridionally compressible** であるとは、



F が T と 2 点で交わる球面の場合、



F が T と 1 点で交わるディスクの場合、



F が (M, T) 内で meridionally compressible でないとき、**meridionally incompressible** という。

$K \subset S^3$ を h に関して Morse position にある結び目とし、$F \subset S^3$ を K に関して Morse position にある閉曲面とする。

定義（essential Morse position）

F が次を満たすとき、K **に関して essential Morse position** にあるという。

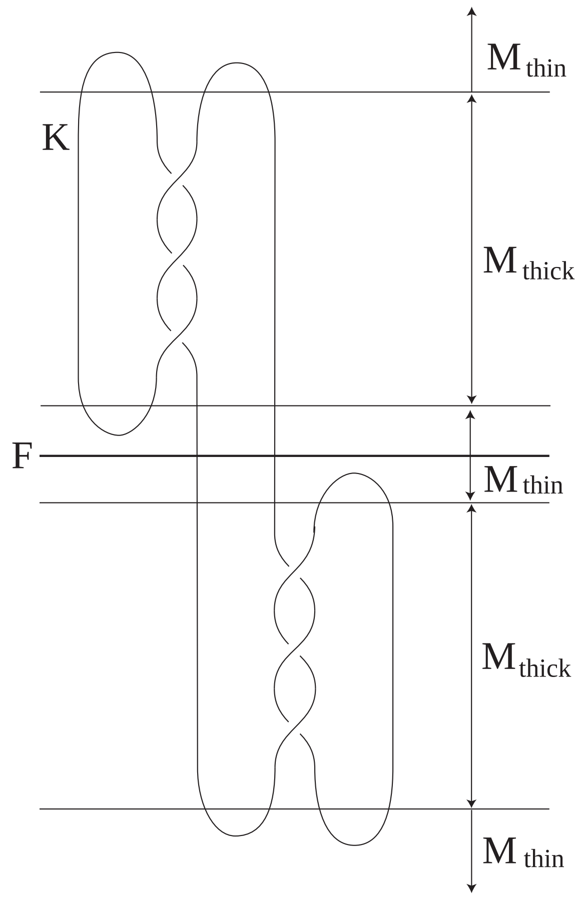
4. $F \cap M_{thin}$ 及び $F \cap M_{thick}$ の各成分が、それぞれ $(M_{thin}, K \cap M_{thin})$ 及び $(M_{thick}, K \cap M_{thick})$ で incompressible かつ meridionally incompressible

定理 1

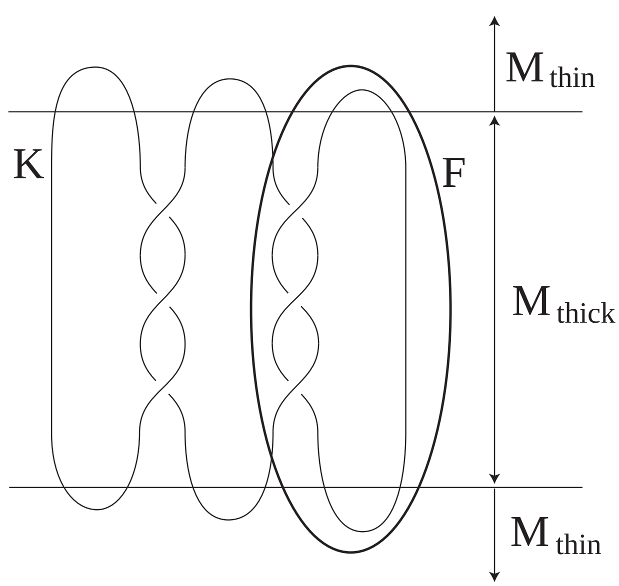
$K \subset S^3$ を h に関して Morse position にある結び目とし、$F \subset S^3$ を K と交わらないか、又は K と横断的に交わる閉曲面で、(S^3, K) 内で incompressible かつ meridionally incompressible であるとする。この時、F は次のいずれかのようにイソトープできる。

1. F は thin level sphere、又は
2. F は K に関して essential Morse position

例 1. F は thin level sphere



例 2. F は K に関して essential Morse position



結び目 K を $h: S^3 \to \mathbb{R}$ に関して Morse position におく。

$a_0, \ldots, a_n$ を K の臨界点で、対応する臨界値 $t_i = h(a_i)$ が、各 i に対して $t_{i-1} < t_i$ を満たすものとする。

P_i を a_{i-1} と a_i の間の level sphere とする。

アンビエント イソトピーの下での最小値

$$w(K) = \min \Sigma |P_i \cap K|$$

を K の **width** といい、$w(K)$ を実現する K の Morse position を **thin position** という。

曲面 $F \subset S^3$ についても同様に thin position を定義する。

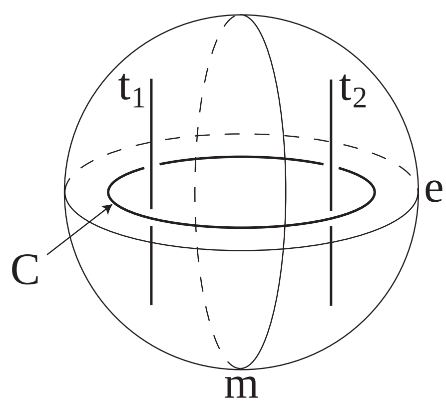
定理 2

$K \subset S^3$ を h に関して thin position にあり、thin level sphere を持たない結び目とする。
$F \subset S^3$ を K と交わらないか又は K と横断的に交わる圧縮不能閉曲面で、K を止めて thin position にあるとする。
この時、K の thick level sphere P で、$P \cap F$ の各成分が P と F 内で本質的なものが存在する。

2-string trivial tangle $(B, t_1 \cup t_2)$ に trivial loop C を加えた tangle を **Hopf tangle** という。

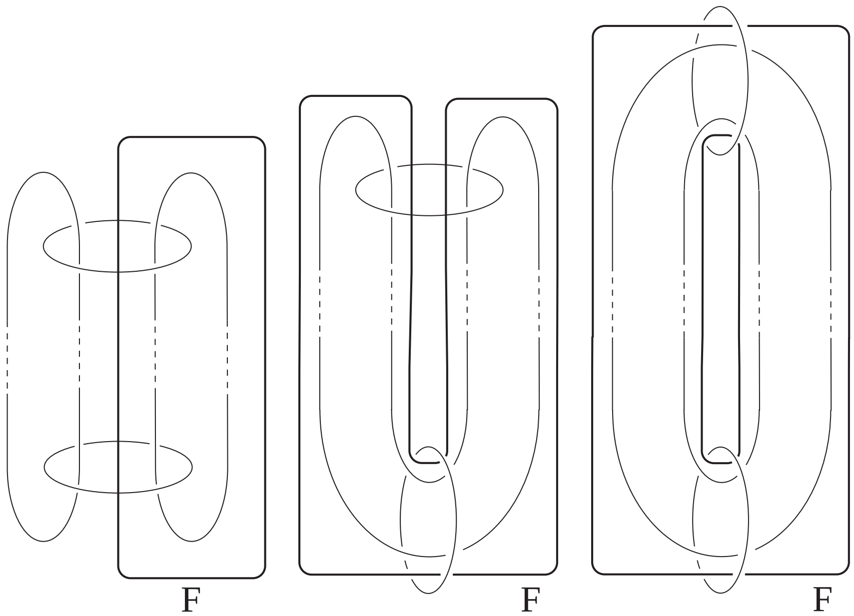
∂B 上の loop e で、trivial loop C と annulus を $B - (t_1 \cup t_2)$ 内で cobound するものを Hopf tangle (B, T) の **equator** という。

∂B 上の loop m で、t_1 と T_2 を分離する disk を $B - (t_1 \cup t_2)$ 内で bound するものを Hopf tangle (B, T) の **meridian** という。



Hopf tangle (B, T)

二つの Hopf tangle (B_1, T_1) と (B_2, T_2) を、x_1 が x_2 と一致するように貼り合わせて得られる link からなる集合を $\mathcal{L}(x_1, x_2)$ とする。ここで、x_i は (B_i, T_i) の equator e_i か又は meridian m_i とする。



$\mathcal{L}(m_1, m_2)$ $\mathcal{L}(m_1, e_2)$ $\mathcal{L}(e_1, e_2)$

定理 3

$L \subset S^3$ を Hopf tangle 分解

$$(S^3, L) = (B_1, T_1) \cup (B_2, T_2)$$

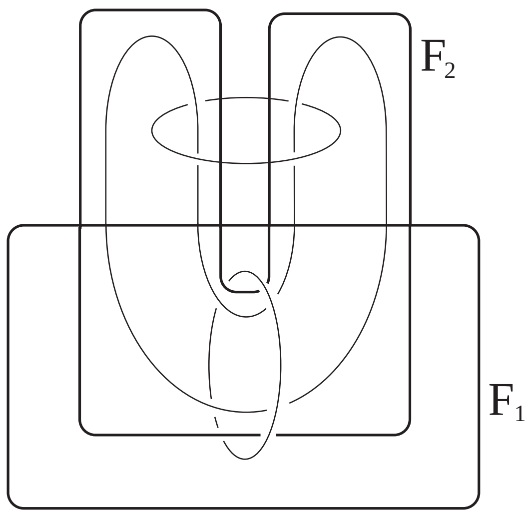
をもつ link とするとき、

1. (S^3, L) 内に分解球面と異なる incompressible かつ meridionally incompressible closed surface が存在する
   $\iff L \in \mathcal{L}(m_1, m_2) \cup \mathcal{L}(m_1, e_2) \cup \mathcal{L}(m_2, e_1) \cup \mathcal{L}(e_1, e_2)$
2. L が一意的な Hopf tangle 分解をもつ
   $\iff L \notin \mathcal{L}(m_1, m_2) \cup \mathcal{L}(m_1, e_2) \cup \mathcal{L}(m_2, e_1)$
   もし $L \in \mathcal{L}(m_1, m_2) \cup \mathcal{L}(m_1, e_2) \cup \mathcal{L}(m_2, e_1)$ ならば、L はちょうど二つの Hopf tangle 分解をもつ。
3. L が small $\iff L \notin \mathcal{L}(e_1, e_2)$
   もし $L \in \mathcal{L}(e_1, e_2)$ ならば、$S^3 -$ intN(L) 内に essential torus が存在する。

$\mathcal{L}(m_1, m_2) \cap (\mathcal{L}(m_1, e_2) \cup \mathcal{L}(m_2, e_1)) = \emptyset$
$(\mathcal{L}(m_1, e_2) \cup \mathcal{L}(m_2, e_1)) \cap \mathcal{L}(e_1, e_2) = \emptyset$
$\mathcal{L}(m_1, m_2) \cap \mathcal{L}(e_1, e_2)$ は二つの Hopf tangle を恒等写像で貼り合わせて得られる唯一の link から成る。

ボロミアン環は $\mathcal{L}(m_1, e_2) \cup \mathcal{L}(e_1, m_2)$ に属する。よって、$\mathcal{L}(m_1, m_2)$ と $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ には属さない。

定理3より、ボロミアン環は丁度二つの Hopf tangle 分解球面 F_1, F_2 をもち、small である。Lozano と Matsuda もボロミアン環が small であることを独立に示している。



参考文献.

1 M. Ozawa, *Morse position of knots and closed incompressible surfaces*, preprint available in http://arxiv.org/abs/math.GT/0503375.